Il teorema della media

1. Teorema della media

Lemma 1. *Sia φ una funzione di classe C^2 su B_ρ. Allora*

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\fint_{\partial B_r}\varphi\right]=\frac{1}{d\omega_d r^{d-1}}\int_{B_r}\Delta\varphi(x)\,dx$$

Proof.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left[\fint_{\partial B_r}\varphi\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{d\omega_d}\int_{\partial B_1}\varphi(r\theta)\,d\theta\right]&=\frac{1}{d\omega_d}\int_{\partial B_1}\theta\cdot\nabla\varphi(r\theta)\,d\theta\\&=\frac{1}{d\omega_d r^{d-1}}\int_{\partial B_r}\frac{x}{|x|}\cdot\nabla\varphi(x)\,d\mathcal{H}^{d-1}(x)=\frac{1}{d\omega_d r^{d-1}}\int_{B_r}\Delta\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 2. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $u\in H^1_{\rm loc}(\Omega)$ e $f\in L^1_{loc}(\Omega)$. Sia u una soluzione di*

$$-\Delta u=f\quad in\quad\Omega,$$

in senso delle distribuzioni, ovvero

$$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx=\int_\Omega f(x)\varphi\,dx\qquad per\ ogni\qquad\varphi\in C^\infty_c(\Omega).$$

Sia $\phi\in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ una funzione data e, per ogni $\varepsilon>0$, sia

$$\phi_\varepsilon\in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)\quad la\ funzione\quad\phi_\varepsilon(x)=\phi(x/\varepsilon).$$

Allora, per ogni aperto $D\Subset\Omega$ ed ogni $\varepsilon>0$ abbastanza piccolo, si ha

$$-\Delta(u*\phi_\varepsilon)=f*\phi_\varepsilon\quad in\quad D$$

in senso delle distribuzioni.

Teorema 3. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $u\in H^1_{\rm loc}(\Omega)$ e $f\in L^1_{loc}(\Omega)$. Sia u una soluzione di*

$$-\Delta u=f\quad in\quad\Omega,$$

in senso delle distribuzioni, ovvero

$$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx=\int_\Omega f(x)\varphi\,dx\qquad per\ ogni\qquad\varphi\in C^\infty_c(\Omega).$$

Allora, per ogni

$$B_r(x_0)\subset B_R(x_0)\Subset\Omega$$

abbiamo

$$\fint_{\partial B_R(x_0)}u-\fint_{\partial B_r(x_0)}u=\int_r^R\frac{1}{d\omega_d s^{d-1}}\int_{B_s(x_0)}\big(-f(x)\big)\,dx\,ds.$$

Corollario 4 (Proprietà della media per funzioni armoniche)**.** *Siano $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un aperto e $u\in H^1_{loc}(\Omega)$ una funzione armonica. Siano $X_0\in\Omega$ e $r_0>0$ tali che*

$$B_{r_0}(X_0)\subset\Omega.$$

Allora:

(i) *la funzione $r\mapsto\displaystyle\fint_{\partial B_r(X_0)}u$ è costante su $(0,r_0)$.*

(ii) *la funzione $r\mapsto\displaystyle\fint_{B_r(X_0)}u$ è costante su $(0,r_0)$.*

2. Proprietà della media e regolarità delle funzioni armoniche

Teorema 5. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misrabile. Allora, sono equivalenti:*

(i) $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ *è armonica su Ω (in senso delle distribuzioni);*

(ii) $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ *e per ogni $X \in \Omega$ la funzione* $r \mapsto \fint_{\partial B_r(X)} u$ *è costante.*

(iii) $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e per ogni $X \in \Omega$ la funzione* $r \mapsto \fint_{B_r(X)} u$ *è costante.*

(iv) $u \in C(\Omega)$ *e per ogni $X \in \Omega$ la funzione* $r \mapsto \fint_{\partial B_r(X)} u$ *è costante.*

(v) $u \in C^\infty(\Omega)$ *e $\Delta u = 0$ in Ω.*

3. Teorema della media per le funzioni subarmoniche

Esercizio 6 (Proprietà della media per funzioni subarmoniche)**.** *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Supponiamo che u sia tale che*

$$\Delta u + f \geq 0 \quad \textit{in} \quad \Omega,$$

in senso delle distribuzioni, ovvero

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega f(x)\varphi \, dx \geq 0 \qquad \textit{per ogni funzione non-negativa} \qquad \varphi \in C^\infty_c(\Omega).$$

Allora, per ogni

$$B_r(x_0) \subset B_R(x_0) \Subset \Omega$$

abbiamo

$$\fint_{\partial B_R(x_0)} u - \fint_{\partial B_r(x_0)} u \geq \int_r^R \frac{1}{d\omega_d s^{d-1}} \left(-\int_{B_s(x_0)} f(x)\, dx \right) ds.$$

Corollario 7 (Proprietà della media per funzioni subarmoniche)**.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ una funzione subarmonica. Siano $X_0 \in \Omega$ e $r_0 > 0$ tali che*

$$B_{r_0}(X_0) \subset \Omega.$$

Allora:

(i) *la funzione*

$$r \mapsto \fint_{\partial B_r(X_0)} u$$

è monotona crescente su $(0, r_0)$;

(ii) *la funzione*

$$r \mapsto \fint_{B_r(X_0)} u$$

è monotona crescente su $(0, r_0)$;

(iii) *la funzione $\widetilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$*

$$\widetilde{u}(X) := \lim_{r \to 0} \fint_{B_r(X)} u$$

è misurabile e definita in ogni punto $X \in \Omega$ e

$$\widetilde{u} = u \quad \textit{quasi-ovunque in} \quad \Omega.$$

Teorema 8 (Proprietà della media per funzioni armoniche)**.** *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Supponiamo che u sia tale che*

$$\Delta u + f \geq 0 \quad in \quad \Omega,$$

in senso delle distribuzioni, ovvero

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega f(x)\varphi \, dx \geq 0 \qquad \text{per ogni funzione non-negativa} \qquad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Allora, $\mu := \Delta u + f$ è una misura (positiva) di Radon su Ω e per ogni $B_r(x_0) \subset B_R(x_0) \Subset \Omega$ abbiamo

$$\fint_{\partial B_R(x_0)} u - \fint_{\partial B_r(x_0)} u = \int_r^R \frac{1}{d\omega_d s^{d-1}} \left(\mu\big(B_s(x_0)\big) - \int_{B_s(x_0)} f(x)\, dx \right) ds.$$